超トーリック多様体の普遍ポアソン変形空間と分類について (変換群論における幾何・代数・組み合わせ論)

長岡, 高広

超トーリック多様体の普遍ポアソン変形空間と分類について

京都大学数学教室　長岡 高広
Takahiro Nagaoka
Department of Mathematics,
Kyoto University*

1　導入

超トーリック多様体はトーリック多様体の超ケーラー類似として Bielawski-Dancer によって導入された ([BD]). トーリック多様体の大きな特徴として凸多面体など組合せ論的な対象との対応が知られている. このようなトーリック多様体の類似物として導入された超トーリック多様体の大きな特徴としては, 超平面配置という組合せ論的対象との対応が知られていることである. 元々 Bielawski-Dancer は微分幾何的な方法 (超ケーラー商) を用いて超トーリック多様体 (toric hyperkahler variety と呼ばれていた) を定義した. 一方で「代数的シンプレクティック商」という代数幾何的な構成 (GIT 商) で, 正則シンプレクティック構造を持つ代数多様体として定義することも可能である (3 節参照). この観点では超トーリック多様体はシンプレクティック (代数) 多様体というクラスに属する (2 節参照). このクラスは冪零軌道閉包や箙多様体などの重要なクラスを含む偶数次元の代数多様体で, 近年では表現論や数理物理との関連 (シンプレクティック双対性など) もあり様々な観点から研究が活発に行われている ([BLPW1], [BLPW2]).

シンプレクティック代数多様体はシンプレクティック構造を持つが, その条件を弱めたポアソン構造も持つ. そこでシンプレクティック代数多様体のポアソン構造の変形を考え, その中でもある種の普遍性を満たす「普遍ポアソン変形空間」というものを考えることができる. 普遍ポアソン変形空間は常に存在するとは限らないが, 錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y_0, \bar{\omega}_0)$ というクラスに対しては, 一般的に Namikawa によって以下が成立することが知られている.

定理 1.1. (Namikawa [Na3])
錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y_0, \bar{\omega}_0)$ について Y, Y_0 それぞれの普遍ポアソン変形空間 $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_0$ が存在し錐的 $\mathbb{C}^*$-作用と可換な以下のような図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y_0 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathcal{Y} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & \mathcal{Y}_0 \arrow[dd, "\bar{\mu}_W"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & \bar{0} \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
H^2(Y, \mathbb{C}) \arrow[rr, "\psi"] & & H^2(Y, \mathbb{C})/W &
\end{tikzcd}$$

ただし $W \subseteq GL(H^2(Y, \mathbb{C}))$ は Namikawa-Weyl 群と呼ばれる有限群である.

注意 1.2.　(1) Brieskorn, Grothendiek, Slodowy らは単純特異点の半普遍変形空間の同時特異点解消を研

* tnagaoka@math.kyoto-u.ac.jp

究した ([Slo]). 上の定理はその一般化になっている.

(2) 後で述べるように, W は Y_0 の相異なるシンプレクティック特異点解消を決定する際にも重要である.

この定理は錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消の普遍ポアソン変形の存在性を主張している重要な定理である. 一方で普遍ポアソン変形を具体的に構成することは一般には難しい. 筆者は超トーリック多様体の場合にこれらの普遍ポアソン変形空間及び Namikawa-Weyl 群を具体的に決定した (定理 4.5 を参照). そしてこの結果の応用として得た, アファインな超トーリック多様体の分類に関する結果の拡張 (定理 5.4 を参照) と 4 次元アファイン超トーリック多様体のシンプレクティック特異点解消の個数の表示を与える.

本稿の構成を述べる. まず第 2 節でシンプレクティック代数多様体や普遍ポアソン変形を定義し Namikawa の定理を述べる. 第 2 節では, 超トーリック多様体や, その普遍ポアソン変形空間の候補である Lawrence トーリック多様体の定義及び基本性質について述べる. そして超トーリック多様体の普遍ポアソン変形空間を決定する. 第 3 節では前節の結果を用いてアファインな超トーリック多様体の同型類は付随する (組合せ論的な対象である) マトロイドの同型類によって分類できることを述べる. そして第 4 節では特に 4 次元のアファイン超トーリック多様体について, その相異なるシンプレクティック特異点解消の個数をいくつかの場合に明示的に与える.

2 シンプレティック代数多様体とポアソン変形理論

本節ではシンプレクティック代数多様体とそのポアソン変形の言葉を導入し, ポアソン変形の中でも普遍性を持つ普遍ポアソン変形空間の存在性及び性質について基本的な結果 (Namikawa の定理) を述べる.

定義. (シンプレクティック代数多様体)
正規代数多様体 Y がシンプレクティック代数多様体であるとは, 非特異点集合 Y_{reg} 上に, ある正則シンプレクティック形式 $\bar{\omega}_0 \in \Gamma(Y, \Omega^1_{Y_{reg}})$ が存在し以下の条件を満たすときを言う:
Y のある特異点解消 $\pi : \tilde{Y} \to Y$ (i.e., $\tilde{Y}$ は smooth で π は $\pi^{-1}(Y_{reg}) \cong Y_{reg}$ となる全射固有双有理射) で $\pi^*\bar{\omega}_0$ が $\tilde{Y}$ 上のある正則 2 形式 ω_0 に拡張する.

なお特にこの拡張された正則 2 形式 ω_0 がシンプレクティック形式であるときこの特異点解消を**シンプレクティック特異点解消**と呼ぶ.

注意 2.1. 今の場合, シンプレクティック特異点解消であることとクレパント解消 (i.e., $\pi^*K_Y = K_{\tilde{Y}}$) であることは同値である.

シンプレクティック代数多様体 Y は自然にポアソン構造という, 構造層 $\mathcal{O}_Y$ 上の演算 $\{-,-\}_0$ で Lie 括弧積と同じ公理を満たす構造を持つ. またポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ に対し, それのポアソン変形とはポアソン代数多様体 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ 及び射 $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to (S, 0)$ (ただし $0 \in S$) であってポアソン構造も含めて $(Y, \{-,-\}_0) = (\bar{\mu}^{-1}(0), \{-,-\}|)$ となっているときを言う. 厳密な定義は述べないが, Y のポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ が**普遍ポアソン変形**であるとは任意の Y の (無限小) ポアソン変形がすべて $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ から (引き戻しとして) 得られるときを言う. 普遍ポアソン変形は一般に存在するとは限らないが, 良い $\mathbb{C}^\times$-作用を持つアファインシンプレクティック代数多様体 Y_0 及びそれのシンプレクティック特異点解消については以下の定理が知られている.

定理 2.2. (Namikawa [Na3])
錐的シンプレクティック多様体及びその (射影的) シンプレティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y_0, \bar{\omega}_0)$ につい

て Y, Y_0 それぞれの普遍ポアソン変形空間 $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_0$ が存在し錐的 $\mathbb{C}^*$-作用と可換な以下のような図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, hook] \arrow[dd] & & Y_0 \arrow[dl, hook] \arrow[dd] \\
\mathcal{Y} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & \mathcal{Y}_0 \arrow[dd, "\bar{\mu}_W"] & \\
 & 0 \arrow[rr, mapsto] & & \bar{0} \\
H^2(Y,\mathbb{C}) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\ni"] & & H^2(Y,\mathbb{C})/W \arrow[ur, phantom, sloped, "\ni"] &
\end{tikzcd}$$

ただし $W \subseteq GL(H^2(Y,\mathbb{C}))$ は Namikawa-Weyl 群と呼ばれる有限群である．

この図式を超トーリック多様体の場合に決定するのが次節の目標である．なお上の定理の主張に現れる Namikawa-Weyl 群は以下で述べるように Y_0 の特異点集合で余次元 2 の成分 $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ に対し，その逆像 $\pi^{-1}(\Sigma_{\mathrm{codim}\,2})$ の幾何学的な描像から記述することができる (cf. [Na2])．

まず一般に [Kal] の結果より，シンプレクティック代数多様体 Y_0 に対し，その特異点集合 $(Y_0)_{\mathrm{Sing}}$ は局所閉で非特異なシンプレクティック部分代数多様体による階層 (stratification) を持つ．特にその階層の成分で余次元 4 以上のもの全体を Σ_0 と書き，$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} := (Y_0)_{\mathrm{Sing}} - \Sigma_0$ と定める．そして $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ の連結成分分解を $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_{k=1}^{s} \Sigma^{(k)}$ としたとき，各 $\Sigma^{(k)}$ の transversal slice S_{ℓ_k} は ADE 型曲面特異点となる．すると (射影的) シンプレクティック特異点解消 $\pi : Y \to Y_0$ は各 $\Sigma^{(k)}$ の各点 y で局所的に次のように記述される．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "locally\ iso"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{S}_{\ell_k} \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0) \arrow[d, "p\times id"] \\
(Y_0, y) \arrow[r, "locally\ iso"] & (S_{\ell_k}, 0) \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0)
\end{tikzcd} ,$$

ただし $\tilde{S}_{\ell_k}$ は S_{ℓ_k} の最小特異点解消である (ℓ_k は例外因子の既約成分の個数を表す)．

さてスライス S_{ℓ_k} に対し，$\tilde{S}_{\ell_k}$ 内に現れる (-2)-曲線を C_i $(1 \leq i \leq \ell_k)$ と置くと

$$\Phi := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \;\middle|\; d_i \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \left(\sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \right)^2 = -2 \right\} \subset H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$$

は $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ 内の $(ADE)_{\ell_k - 1}$ 型のルート系を定めている．特に対応する Weyl 群 $W_{A_{\ell_k-1}} := \mathfrak{S}_{\ell_k}$ が $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ に作用している．しかし大域的な $\Sigma^{(k)}$ の上にある例外因子 $\pi^{-1}(\Sigma^{(k)})$ の既約成分は ℓ_k 個より少なくなっていることがある．より正確には $\Sigma^{(k)}$ のモノドロミーを考慮して以下の準同型を考える．

$$\rho_k : \pi_1(\Sigma^{(k)}) \to \mathrm{Aut}(\Delta_{\ell_k - 1}),$$

ただし Δ_{ℓ_k-1} は対応する Dynkin 図形，$\mathrm{Aut}(\Delta_{\ell_k-1})$ はそのグラフ自己同型群を表す．そして Δ_{ℓ_k-1} に対応する Weyl 群 $W_{\Delta_{\ell_k-1}}$ の部分群 $W_{\Sigma^{(k)}}$ を次で定義する．

$$W_{\Sigma^{(k)}} := \{ \sigma \in W_{\Delta_{\ell_k-1}} \mid \sigma\iota = \iota\sigma \ (\iota \in \mathrm{Im}(\rho_k)) \}$$

すると $W := \prod_{k=1}^{s} W_{\Sigma^{(k)}}$ は $H^2(Y, \mathbb{R})$ に作用しこれが Namikawa-Weyl 群と一致する ([Na2] 参照)．

3　超トーリック多様体と Lawrence トーリック多様体

本節では超トーリック多様体とその普遍ポアソン変形空間の候補である Lawrence トーリック多様体を定義しいくつかの例をあげる．また超トーリック多様体の同型類を保つ変換について述べる．まず以下の自由アー

ベル群の完全系列が与えられたとする．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-d} \xrightarrow{\ B\ } \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\ A\ } \mathbb{Z}^d \longrightarrow 0$$

そして後で用いるため行列 A, B を次のようにそれぞれ列ベクトル，行ベクトルで表示しておく．なお以下では (都合上) 行列 A がユニモジュラー (i.e., 全ての $d \times d$-小行列式は 0 か ± 1 となる) となっていると仮定する．

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$$

さて上の完全列に対し $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{C}^\times)$ を取ると次の代数トーラスの間の完全系列を得る．

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^d \xrightarrow{\ {}^tA\ } \mathbb{T}^n \xrightarrow{\ {}^tB\ } \mathbb{T}^{n-d} \longrightarrow 1$$

この状況で ${}^tA : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^n$ の埋め込みによって $\mathbb{T}^d$ の $\mathbb{C}^n$-表現を考え，この表現から自然に定まる $\mathbb{T}^d$ の $(\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*, \omega_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^n dz_j \wedge dw_j)$ への作用を考える (i.e., $\boldsymbol{t} \cdot (z_j, w_j) := (\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{a_j}} z_j, \boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{a_j}} w_j)$). するとこの作用はシンプレクティック構造を保ち，さらにハミルトニアン作用と呼ばれるものになっているため $\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}$-不変なモーメント写像 $\mu : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^d$ が存在し，今の場合は次のように記述できる．

$$\mu(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n) := \sum_{j=1}^n z_j w_j \boldsymbol{a_j}.$$

さて以下で超トーリック多様体 (resp. Lawrence トーリック多様体) を $\mu^{-1}(0)$ (resp. $\mathbb{C}^{2n}$) の $\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}$ による「商空間」として定義したい．しかし一般に非コンパクトな群による商はハウスドルフにならないなど良い性質を持たないため，$\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}$ の指標群 $\mathbb{Z}^d = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times)$ の元 α を取るごとに定まる $\mu^{-1}(0)$ (resp. $\mathbb{C}^{2n}$) の良い開部分集合 $\mu^{-1}(0)^{\alpha-ss}$(resp. $(\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss}$，いわゆる幾何学的不変式論 (GIT) の意味での α-(半) 安定集合) の商として以下のように定義する．

定義 & 補題 3.1. (Lawrence トーリック多様体と超トーリック多様体)
上の状況で $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ に対し，α-半安定集合 $(\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss}$ を以下で定義する．

$$(\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss} := \{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \alpha \in \sum_{j=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} |z_j| \boldsymbol{a_j} - \sum_{j=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} |w_j| \boldsymbol{a_j}\}.$$

また $\mu^{-1}(0)^{\alpha-ss} := (\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss} \cap \mu^{-1}(0)$ と定める．そして超トーリック多様体 $Y(A, \alpha)$ と Lawrence トーリック多様体 $X(A, \alpha)$ を以下で定義する．

$$Y(A, \alpha) := \mu^{-1}(0)^{\alpha-ss} // \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}},$$
$$X(A, \alpha) := (\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss} // \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}.$$

注意 3.2. 定義から $(\mathbb{C}^{2n})^{0-ss} = \mathbb{C}^{2n}$ のため，自然な包含 $(\mathbb{C}^{2n})^{\alpha-ss} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mu^{-1}(0)^{\alpha-ss} \subseteq \mu^{-1}(0)$) があることと，$\mu$ が $\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}}$-不変であることから次の図式が誘導される．

$$\begin{tikzcd}
 & Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
 & 0 \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] & & 0 \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, equal] & & \mathbb{C}^d &
\end{tikzcd}$$

またこの図式は $\mathbb{C}^{2n}$ へのスカラー倍で定まる錘的 $\mathbb{C}^\times$-作用について同変な図式である．

なお $Y(A,\alpha)$, $X(A,\alpha)$ について, α を十分 generic に取れば α-半安定集合への $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^d$-作用は自由となりその商空間である $Y(A,\alpha)$, $X(A,\alpha)$ は以下のように非特異なシンプレクティック代数多様体, ポアソン代数多様体になり, $\pi : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ はシンプレクティック特異点解消を与える.

定理 3.3. (cf. [BK] 等) 上の状況で A がユニモジュラー, α が generic とする (cf. 下の注意). この時以下が成立する.

(1) $Y(A,\alpha)$ は $2(n-d)$ 次元非特異シンプレクティック代数多様体で, $Y(A,0)$ は $2(n-d)$ 次元錘的シンプレクティック代数多様体.
(2) $X(A,\alpha)$ は $2n-d$ 次元非特異ポアソン代数多様体で, $X(A,0)$ は $2n-d$ 次元アファインポアソン代数多様体.
(3) $\pi : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ は錘的シンプレクティック代数多様体の (射影的な) シンプレクティック特異点解消を与える.

注意 3.4. α が generic というのは正確には後で 6 節で定義される $\mathbb{R}^d$ 内の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し

$$\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

が成立することである.

以下でいくつか超トーリック多様体の例を与える.

例 3.5. (A_n 型曲面特異点)
次の完全系列を考える.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{A=\begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^n$$

この時 α を generic に取ると, 対応する $\pi : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ は以下のように与えられる.

$$\begin{array}{ccccl} Y(A,\alpha) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{S}_{A_n} & & : A_n \text{ 型曲面特異点の最小特異点解消} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow & & \\ Y(A,0) & \xrightarrow{\sim} & S_{A_n} & := \left\{ {u_0}^{n+1} - x_1 y_1 = 0 \right\} & : A_n \text{ 型曲面特異点} \end{array}$$

例 3.6. (A_n 型最小冪零軌道閉包)
次の完全系列を考える.

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{B=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}$$

この時 α を generic(正確には $\alpha > 0$) に取ると, 対応する $\pi : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ は以下のように与えられる.

$$
\begin{tikzcd}
Y(A,\alpha) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"] & \left\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^{2n+2} \;\middle|\; \boldsymbol{z} \neq 0,\ \sum_{j=0}^{n} z_j w_j = 0\right\}/\mathbb{T}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi"] & T^*\mathbb{C}\boldsymbol{P}^n \arrow[d, "\pi'"] \\
Y(A,0) \arrow[r, phantom, "="] & \left\{ C = \begin{pmatrix} u_0 & x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ y_{01} & u_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1,n} \\ y_{0n} & \cdots & y_{n-1,n} & u_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{n+1} \;\middle|\; C \text{ のすべての } (2\times 2) \text{ 行列式} = 0 \right\} \arrow[r, equal] & \overline{\mathcal{O}}^{min}_{A_n}
\end{tikzcd}
$$

ただし π' は A_n 型の冪零軌道閉包 $\overline{\mathcal{O}}^{min}_{A_n}$ の Springer 特異点解消であり, π は具体的には以下のように与えられる.

$$
\pi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) := \begin{pmatrix} z_0w_0 & z_0w_1 & \cdots & z_0w_n \\ w_0z_1 & z_1w_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z_{n-1}w_n \\ w_0z_n & \cdots & w_{n-1}z_n & z_nw_n \end{pmatrix}
$$

また上の 2 つの例を含む超トーリック多様体のクラスとして以下がある.

例 3.7. (超トーリック箙多様体 (Toric quiver variety) cf. [HSt, section 8])
$G = (\{v_0,\ldots,v_d\}, E = \{e_{ij} \mid (i,j) \in E\})$ を連結な向き付きグラフでループは持たないとする. また v_0 は「湧き出し」とする, すなわち e_{j0} のような辺は存在しないとする (こうなるようにいつでも向きを自由に変えて良い. 実際得られる代数多様体は同型である). この状況で G の incidence matrix が定める次の写像を考える.

$$
A_G : \mathbb{Z}^{|E|} \twoheadrightarrow N \subset \mathbb{Z}^{d+1} : e_{ij} \to v_i - v_j,
$$

ただし $N = \{\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_d)^T \mid \sum_{j=0}^{d} \alpha_j = 0\} \cong \mathbb{Z}^d$. すると N の基底として $v_0 - v_1, \ldots, v_0 - v_d$ を取ると, 対応するトーラス作用 $\mathbb{T}_N = \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathbb{C}^{2|E|}$ は今の場合次のように記述される.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}\cdot(\ldots, z_{0j}, \ldots, z_{ij}, \ldots, \ldots, w_{0j}, \ldots, \ldots, w_{ij}, \ldots) \\
&\quad = (\ldots, t_j z_{0j}, \ldots, t_j z_{ij} t_i^{-1}, \ldots, \ldots, w_{0j} t_j^{-1}, \ldots, \ldots, t_i w_{ij} t_j^{-1}, \ldots)
\end{aligned}
$$

この作用に関する超トーリック多様体 $Y(A_G,\alpha)$ を超トーリック箙多様体 (Toric quiver variety) と呼ぶ. また名前や構成からもわかる通り, 超トーリック箙多様体は以下のようにして特別な中島箙多様体となる. 実際以下の例のように向き付きグラフ G に対し, v_0 のところで「切り開き」, 向きを両方につけることで (フレーム付き) 二重箙 $\overline{Q}_G$ を得ることができる.

$$
\underset{G}{\begin{tikzcd}
 & v_1 \arrow[dr] & \\
v_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_2 \arrow[r] & v_4 \\
 & v_3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}}
\quad \rightsquigarrow \quad
\underset{\overline{Q}_G}{\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d, shift left] & & \\
 & & \bullet \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] & & \\
\circ \arrow[r, shift left] & \bullet \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \bullet \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & \bullet \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \circ \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}}.
$$

するとトーラス作用の作り方から対応する超トーリック多様体 $Y(A_G,\alpha)$ は箙 $\overline{Q}_G$ に対してすべて次元 1 のベクトル空間をのせることで得られる中島箙多様体 $\mathfrak{M}_\alpha(\overline{Q}_G, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と一致する.

超トーリック箙多様体は超トーリック多様体の多くのクラスを含み, 実際上で述べた 2 つの例はそれぞれ $n+1$) 角形の辺から得られるグラフ G 及び以下のグラフに対応する超トーリック箙多様体であることが分かる. また後で述べるように 4, 6 次元の超トーリック多様体はすべて超トーリック箙多様体として得られる.

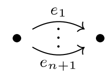


図 1　例 3.4

この節の残りでは, 行列 A を別の行列 A' に取り換えた時にいつ $Y(A,\alpha)$ と $Y(A,\alpha')$ が (錘的) シンプレクティック代数多様体として同型になるのか考えたい. そのために以下の変換及び同値関係を導入する.

定義. 2 つの $d \times n$-行列 A, A' について

$$A \sim A' \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists P \in GL_d(\mathbb{Z}) \text{ かつ } \exists D: \text{ 符号付き置換行列 s.t. } A' = PAD.$$

注意 3.8. 上の定義は分かりやすく述べると,「行基本変形」,「列の交換」,「列の ± 1 倍」で移り合う行列は同値な行列と定めている.

この変換は超トーリック多様体の同型類を変えないことが分かる. 今超トーリック多様体の定義から一般に $Y(A,\alpha)$ には $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}$ が (ハミルトニアンに) 作用していることに注意する. すると次が分かる.

補題 3.9. $A' = PAD \ \Rightarrow\ Y(A,\alpha) \cong Y(A', P\alpha)$: $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}$-同変な錘的シンプレクティック代数多様体としての同型

5 節ではこの結果やその逆を用いてアファイン超トーリック多様体の分類を行う.

4　超トーリック多様体の普遍ポアソン変形空間と Namikawa-Weyl 群の記述

本節ではアファイン超トーリック多様体 $Y(A,0)$ の超トーリック多様体 $Y(A,\alpha)$ によるシンプレクティック特異点解消 $\pi : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ について, それらの普遍ポアソン変形空間及び Namikawa の定理の図式を決定する.

今, 注意 3.2 で注意したように次のようなポアソン変形の図式があった.

$$\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] & & 0 \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, equal] \arrow[ur, phantom, "\ni"] & & \mathbb{C}^d \arrow[ur, phantom, "\ni"] &
\end{tikzcd}$$

この時, まず非特異な $Y(A,\alpha)$ について, 今ポアソン変形 $\overline{\mu} : X(A,\alpha) \to \mathbb{C}^d$ が与えられている. すると変形理論を用いるとこれが普遍ポアソン変形になるための必要十分条件は以下で定義される Kirwan 写像 κ_2 が同型なことだと分かる.

$$\kappa_2 : \mathbb{Z}^d \to H^2(Y(A,\alpha),\mathbb{Z}) \ :\ \rho \mapsto c_1(L_\rho),$$

ただし $L_\rho := \mu^{-1}(0)^{\alpha-ss} \times_{\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^d} \mathbb{C}$ は $\rho \in \mathbb{Z}^d = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^d, \mathbb{C}^\times)$ が誘導する随伴直線束である. すると非特異超トーリック多様体の Kirwan 写像がいつ同型になるかについての結果 ([Ko1]) を用いると次が分かる.

系 4.1. (cf. [BLPW1])
上の状況で, 全ての i に対し $\boldsymbol{b_i} \neq 0$ であれば, Lawrence トーリック多様体 $X(A,\alpha)$ 及び射 $\bar{\mu} : X(A,\alpha) \to \mathbb{C}^d$ が超トーリック多様体 $Y(A,\alpha)$ の普遍ポアソン変形を与える.

注意 4.2. 与えられた超トーリック多様体 $Y(A,\alpha)$ は A と α を適切に別の A', α' に取り換えることで, 常に $\boldsymbol{b_i} \neq 0$ $(\forall i)$ を満たすように取り換えることができる.

次にアファイン超トーリック多様体 $Y(A,0)$ の普遍ポアソン変形を決定したい. まず Namikawa Weyl 群を決定する. 以下で行列 A がユニモジュラーということから行列 B の各行ベクトルを並び替えたり ± 1 倍したりすることで

$$B = \left(\begin{array}{c} B^{(1)} \\ \hline B^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline B^{(s)} \end{array}\right), \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b^{(k)}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b^{(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{ただし } k_1 \neq k_2 \text{ なら } \boldsymbol{b^{(k_1)}} \text{ と } \boldsymbol{b^{(k_2)}} \text{ は互いに平行ではない.}$$

という形に取り換えられることに注意する ($B^{(k)}$ は $\ell_k \times (n-d)$ 行列とする). 以下では特に断らない限り, B がこのような形になっていると仮定する. すると 2 節で述べた余次元 2 の特異点集合の連結成分への分解及びスライスは以下のように与えられることが分かる.

系 4.3. ([PW] の系)
アファイン超トーリック多様体 $Y(A,0)$ の余次元 2 の特異点集合 $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ は

$$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_{k=1}^{s} \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$$

という連結成分への分解を持つ. ここで

$$\mathring{Y}^{(k)}(A,0) := \left\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^{2n} \;\middle|\; i \in \{m_{k-1}+1,\ldots,m_k\} \Leftrightarrow (z_i,w_i) = 0\right\} /\!/ \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \subseteq Y(A,0)$$

はシンプレクティック部分代数多様体である (ただし $m_k := \sum_{i=1}^{k} \ell_i$ と定める). さらに各点 $y \in \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$ におけるスライスは A_{ℓ_k} 型曲面特異点である. 特に $Y(A,0)$ の Namikawa-Weyl 群 W は $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の部分群である.

以下で $W = W_B$ となることを示したい. 本来 Namikawa-Weyl 群の定義から W を求めるためには上の系で述べたような局所的な記述ではなく大域的に $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ の定める $Y(A,\alpha)$ 内の例外因子の既約成分がいくつあるかを見る必要があった. これを直接見るのは一般には難しい. しかし今超トーリック多様体及び Lawrence トーリック多様体が満たす次の $\mathbb{C}^{\times}$-同変な図式があったことに注意する.

$$\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & 0 \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, equal] & & \mathbb{C}^d &
\end{tikzcd}$$

今系 4.1 で見たように $\bar{\mu} : X(A,\alpha) \to \mathbb{C}^d$ は $Y(A,\alpha)$ の普遍ポアソン変形であった. すると $W = W_B$ となることを示すためには定理 2.2 及び普遍性から次を示せば十分なことがすぐに分かる. なおこの補題は Namikawa-Weyl 群の作用の具体的な記述も与えている.

補題 4.4. (Namikawa-Weyl 群の作用の具体的な記述)
上の状況で $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の $X(A,0)$ と $\mathbb{C}^d$ への作用であって以下を満たすものが構成できる.

(i) $\mathbb{C}^d$ への W_B-作用は線形作用で, $X(A,0)$ への W_B-作用はポアソン構造を保つ.

(ii) $\bar{\mu} : X(A,0) \to \mathbb{C}^d$ は W_B-同変である.

(iii) W_B-作用は $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用と可換である.

(iv) W_B は $Y(A,0) \subseteq X(A,0)$ には自明に作用する.

具体的には $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s} \subseteq \mathfrak{S}_n$ と思って $\mathbb{C}^{2n}$ の座標 $z_1, \ldots, z_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ それぞれの置換作用が $X(A,0)$ への作用を誘導し, $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ たちの置換作用が $\mathbb{C}^d = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ への作用を誘導する.

これらの結果を総合して以下を得る.

定理 4.5. A がユニモジュラーで α が generic とする. そして B は上で述べたような形に取り換えておいてあるとし, W_B を $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ に上で述べたように作用させたとき, 超トーリック多様体に対する定理 2.2 の可換図式は次のように与えられる.

$$\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi_{W_B}"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0)/W_B \arrow[dd, "\bar{\mu}_{W_B}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] & & \bar{0} \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, "\psi"] \arrow[ur, phantom, "\ni"] & & \mathbb{C}^d/W_B \arrow[ur, phantom, "\ni"] &
\end{tikzcd}$$

ただし Π_{W_B} は $\Pi : X(A,\alpha) \to X(A,0)$ と W_B による商写像の合成とする.

5　アファイン超トーリック多様体の分類

本節では前節の普遍ポアソン変形空間の具体的な記述の応用 (正確には普遍性のみを用いる) として, アファイン超トーリック多様体の (錐的シンプレクティック代数多様体としての) 同型類がマトロイドと呼ばれる組合せ論的対象で分類できることについて述べる. これは講演の後に得られた結果である. この結果の特別な場合として 4 次元・6 次元アファイン超トーリック多様体の分類について述べ, 特に 4 次元アファイン超トーリック多様体の分類の各クラスを具体的に記述する.

2 節で定義した行列 A の変換について $A \sim A'$ なら特に $Y(A,0)$ と $Y(A',0)$ の間に $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}$-同変な錐的シンプレクティック代数多様体としての同型が誘導されていたことを思い出す (cf. 補題 3.9).

一方で行列 A に対して, その列ベクトル $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ の一次独立な部分集合全体の情報を抽出して得られる組合せ論的な対象としてマトロイド $M(A)$ が定まる (一般のマトロイドの定義等は [Ox] を参照). すると上で定義した変換はマトロイドの同型類を保つことが定義からすぐに分かり, さらに全ユニモジュラー行列 (i.e., 全ての小行列式が $0, \pm 1$. ユニモジュラー行列は変換を用いていつでもこれを満たすようにできる) に対しては以下のように逆が成立する.

命題 5.1. 2 つの全ユニモジュラー行列 A, A' について,

$$A \sim A' \iff M(A) \cong M(A')$$

さらに超トーリック多様体の分類に関して補題〜の逆である以下の結果が知られている.

命題 5.2. (Arbo and Proudfoot [AP])
2 つの全ユニモジュラー行列 A, A' について

$$A \sim A' \iff Y(A,0) \cong Y(A',0) : \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}\text{-同変な錐的シンプレクティック代数多様体としての同型}$$

注意 5.3. [AP] では一般の (ユニモジュラーとは限らない) 超トーリック多様体の $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}$-同変レベルでの分類が, ゾノトープと呼ばれる特別な凸多面体によるタイル張り (あるいは向き付けマトロイド) で分類できることが示されている.

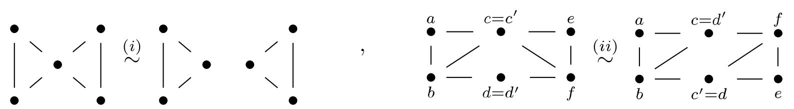
この結果は $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{n-d}$-同変レベルでの分類を与えているが, 実際にはこれは単に錘的シンプレクティック代数多様体レベルでの分類になっていることが分かる (次の定理の証明で普遍ポアソン変形空間がトーリック多様体であることを用いる).

定理 5.4. 2 つの全ユニモジュラー行列 A, A' について以下は同値

(i) $A \sim A'$,
(ii) $M(A) \cong M(A')$,
(iii) $Y(A,0) \cong Y(A',0)$: 錘的シンプレクティック代数多様体としての同型.

注意 5.5. 例 3.7 で考えたようにあるグラフ G に対し, $A = A_G$ の時対応する超トーリック多様体を超トーリック箙多様体と呼んだ. このような A に対応するマトロイド $M(A_G)$ はグラフィックマトロイドと呼ばれ, さらに 2 つのグラフィックマトロイドが同型になるための必要十分条件 (Whitney's 2-isomorphism theorem [Ox]) を用いることで 2 つのグラフ G_1, G_2 について次の 2 つは同値であることが分かる.

(1) $Y(A_{G_1},0) \cong Y(A_{G_2},0)$: 錘的シンプレクティック代数多様体としての同型
(2) G_1 に次の 2 つの操作 (下図参照) を繰り返すことで G_2 に変換できる.
  (i) 2 つの非連結なグラフを 1 頂点で結合させる操作とその逆の操作,
  (ii) ホイットニーツイスト (G が 2 つのグラフ H_1 と H_2 を 2 頂点で結合させて得られているとき, G を H_1 と H_2 に一度分けてから貼り合わせる頂点を逆にして貼りなおす操作).

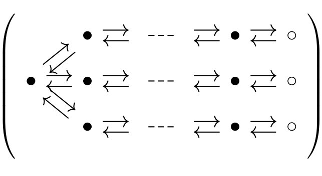


上の定理を用いてマトロイドの分類に帰着することで 4, 6 次元のアファイン超トーリック多様体を分類することができる (これは rank 2, 3 の正則マトロイドの分類に対応). その結果 4, 6 次元の場合はすべて超トーリック箙多様体 (cf. 例 3.7) として得られることが分かり, 実際それぞれ次の図のような箙に対応する箙多様体が 4, 6 次元のアファイン超トーリック多様体の完全な分類となっている.

(1) 4 次元の場合

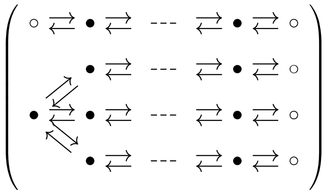
$$\overline{Q}_{G_1^{\ell}} = \left(\begin{array}{c} \circ \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \circ \\ \circ \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \circ \end{array} \right),$$

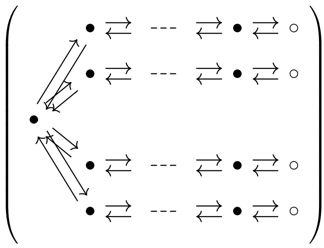
$\overline{Q}_{G_2^{\ell}} =$

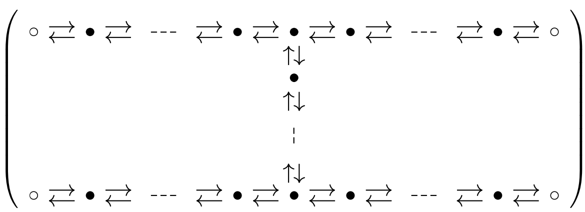
,

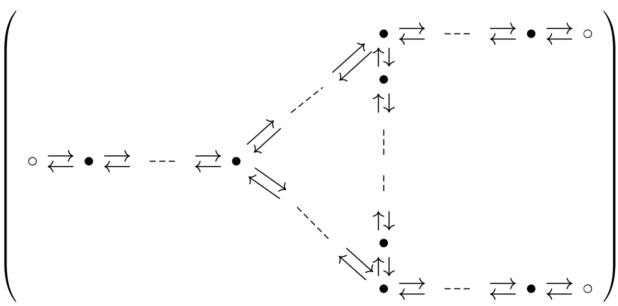
(2) 6 次元の場合

$$\overline{Q}_{G_3^{\boldsymbol{\ell}}} = \begin{pmatrix} \circ \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows & \text{---} & \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \circ \\ \circ \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows & \text{---} & \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \circ \\ \circ \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows & \text{---} & \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \circ \end{pmatrix},$$

$\overline{Q}_{G_4^{\boldsymbol{\ell}}} =$  ,

$\overline{Q}_{G_5^{\boldsymbol{\ell}}} =$  ,

$\overline{Q}_{G_6^{\boldsymbol{\ell}}} =$  ,

$\overline{Q}_{G_7^{\boldsymbol{\ell}}} =$  ,

ただし $\boldsymbol{\ell} := (\ell_1, \ldots, \ell_s)$ は各チェインの長さを表す.

なお特に 4 次元の場合は次のように分類の代表元が具体的に記述できる.

定理 5.6. (4 次元ユニモジュラーアファイン超トーリック多様体の分類)
4 次元のユニモジュラーなアファイン超トーリック多様体 $Y(A,0)$ は次のいずれか一方のみと錐的シンプレクティック多様体として同型である.

(i) $S_{A_{\ell_1-1}} \times S_{A_{\ell_2-1}}$ (ただし $S_{A_{\ell-1}}$ は $A_{\ell-1}$ 型曲面特異点とする)

$$\text{(ii)}\ \overline{\mathcal{O}^{min}}(\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}) := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & x_{12} & x_{13} \\ y_{12} & u_2 & x_{23} \\ y_{13} & y_{23} & u_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} u_1^{\ell_1} & x_{12} & x_{13} \\ y_{12} & u_2^{\ell_2} & x_{23} \\ y_{13} & y_{23} & u_3^{\ell_3} \end{pmatrix} \text{の全ての}\ 2\times 2\text{-小行列式} = 0 \right\}$$

さらに Namikawa-Weyl 群 W は

(i) の場合: $W = \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \mathfrak{S}_{\ell_2}$
(ii) の場合: $W = \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \mathfrak{S}_{\ell_2} \times \mathfrak{S}_{\ell_3}$

となる.

6 4 次元アファイン超トーリック多様体のシンプレクティック特異点解消の個数

本節では, 前節で分類した 4 次元のアファイン超トーリック多様体 $\overline{\mathcal{O}^{min}}(\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\})$ に対してそのシンプレクティック特異点解消の個数を具体的に記述することを考える. まず錘的シンプレクティック代数多様体の一般論と超トーリック多様体の Kirwan 写像が同型であることを用いると, アファイン超トーリック多様体のシンプレクティック特異点解消 (クレパント解消) はすべて $\pi_\alpha : Y(A,\alpha) \to Y(A,0)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^d$: generic) という形で得られることが分かる. すると次に, どの $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ が同じクレパント解消を与えるのかということが問題になる. そのために行列 A が定める次の $\mathbb{R}^d$ 内の超平面配置 $\mathcal{A}$ を考える.

$$\mathcal{A} := \{H \mid H\ \text{はいくつかの}\ \boldsymbol{a_j}\ \text{で生成される}\ \operatorname{codim} H - 1\ \text{の部分空間}\}$$

すると超トーリック多様体の定義から $\mathcal{A}$ の同じ chamber(超平面によって区切られた領域) から α, α' を取ってくると $Y(A,\alpha) = Y(A,\alpha')$ となる. 一方で超平面配置 $\mathcal{A}$ には自然に $\boldsymbol{a_j}$ の置換で Namikawa-Weyl 群 W_B が自然に作用していることが分かる. そしてシンプレクティック代数多様体の一般論 ([Na3]) から以下が従う (正確には各 chamber が Kirwan 写像を通して各クレパント解消の豊富錘に対応し, 可動錘が Namikawa-Weyl 群の基本領域に一致している).

命題 6.1. W_B の作用で互いに移り合う chamber の中から α, α' を取ってくると, 付随するクレパント解消 π_α, $\pi_{\alpha'}$ は同型である. 特に $Y(A,0)$ の相異なるクレパント解消の個数は以下で与えられる.

$$\frac{\mathcal{A}\ \text{の chamber の個数}}{\# W_B}.$$

そこでこの結果を用いて 4 次元のアファイン超トーリック多様体 $\overline{\mathcal{O}^{min}}(\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\})$ に対し対応する $\mathcal{A}$ を記述し, その chamber の個数を組合せ論の結果を用いて決定することで, 相異なるクレパント解消の個数を求める. まず $\overline{\mathcal{O}^{min}}(\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\})$ は (前節で述べなかったが) 次の行列 A, B から構成されるアファイン超トーリッ

ク多様体 $Y(A,0)$ である.

$$B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \ell_1 - 1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \ell_2 - 1, \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \ell_3 \end{array} \qquad A = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} -1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & I_{\ell_1-1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ \hline 0 & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & I_{\ell_2-1} & 0 \\ 0 & -1 & & & \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & I_{\ell_3} \\ 1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

すると一般に超平面配置 $\mathcal{A}$ について, その chamber の個数は, より精密な不変量である特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ から $|\chi_{\mathcal{A}}(-1)|$ として計算できるが, この特性多項式は次のような別の超平面配置 $\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}$ の特性多項式から計算できることが分かる.

補題 6.2. 超平面配置 $\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} \subset \mathbb{R}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3}$ を以下のように定める. ただし $(x_1,\ldots,x_{\ell_1},y_1,\ldots,y_{\ell_2},z_1,\ldots,z_{\ell_3})$ は $\mathbb{R}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3}$ の座標である.

$$\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} := \left\{ \begin{array}{lll} H_{ijk}: & x_i + y_j + z_k = 0 & (1 \le i \le \ell_1, 1 \le j \le \ell_2, 1 \le k \le \ell_3) \\ H^x_{i_1,i_2}: & x_{i_1} - x_{i_2} = 0 & (1 \le i_1 < i_2 \le \ell_1) \\ H^y_{j_1,j_2}: & y_{j_1} - y_{j_2} = 0 & (1 \le j_1 < j_2 \le \ell_2) \\ H^z_{k_1,k_2}: & z_{k_1} - z_{k_2} = 0 & (1 \le k_1 < k_2 \le \ell_3) \end{array} \right\}$$

この時,

$$\chi_{\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}}(t) = t^2 \chi_{\mathcal{A}}(t).$$

するとこの超平面配置 $\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}$ は Edelman と Reiner によって考察され, chamber の個数より精密な不変量である特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}}(t)$ が計算されている (chamber の個数は $|\chi_{\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}}(-1)|$ として計算できる).

定理 6.3. (Edelman-Reiner [ER])

(1) $\ell_3 = 1$ の時,

$$\chi_{\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,1}}(t) = t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-(\ell_1+\ell_2-1)).$$

(2) $\ell_3 = 2$ の時,

$$\chi_{\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,2}}(t) = t^2(t-1)\prod_{i=\ell_1+1}^{\ell_1+\ell_2}(t-i)\prod_{j=\ell_2+1}^{\ell_1+\ell_2-1}(t-j).$$

注意 6.4. Edelman-Reiner はさらに超平面配置 $\mathcal{A}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}$ が $\ell_3 = 1,2$ の時, 自由性と呼ばれる性質を持つことを示している (自由性を持つとき一般に特性多項式は 1 次式の積に分かれることが知られている). また $\ell_3 \ge 3$ の時は自由性を持たないことが示されており, 実際 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 3$ の時, 特性多項式は以下のようになる.

$$\chi_{A_{3,3,3}}(t) = t^2(t-1)(t-5)(t-7)(t^4 - 23t^3 + 200t^2 - 784t + 1188)$$

このように一般の場合は自由性が無いことから特性多項式の表示は難しく, 知られていない.

系 6.5. 4 次元アファイン超トーリック多様体 $\overline{\mathcal{O}^{min}}(\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\})$ の相異なるクレパント解消の個数は以下で与えられる.

(1) $\ell_3 = 1$ の時,

$$\binom{\ell_1+\ell_2}{\ell_1}$$

(2) $\ell_3 = 2$ の時,

$$\frac{\binom{\ell_1+\ell_2+1}{\ell_1}\binom{\ell_1+\ell_2+1}{\ell_2}}{\ell_1+\ell_2+1}$$

謝辞

この度は講演の機会を頂きありがとうございました．様々な方との議論を通して大変有意義な時間を過ごすことができました．世話人の皆様に感謝いたします．

参考文献

[AP] M. Arbo and N. Proudfoot, Hypertoric varieties and zonotopal tilings. Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 23, 7268–7301.

[BD] R. Bielawski and A. Dancer, The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds. Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 727-760.

[BK] G. Bellamy and T. Kuwabara, On deformation quantizations of hypertoric varieties. Pacific J. Math. 260 (2012), no. 1, 89–127.

[BLPW1] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, and B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure. Astérisque No. 384 (2016), 1-73.

[BLPW2] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, and B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category O and symplectic duality. with an appendix by I. Losev. Astérisque No. 384 (2016), 75-179.

[ER] P. H. Edelman and V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings. Discrete Comput. Geom. **15**, 307–340 (1996).

[HSt] T. Hausel and B. Sturmfels, Toric hyperkaehler varieties. Doc. Math. 7 (2002), 495-534 (electronic).

[Kal] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view. J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135-156.

[Kir] A. Kirillov Jr., Quiver representations and quiver varieties. Graduate Studies in Mathematics, 174. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. xii+295 pp.

[Ko1] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 11 (2000), no. 8, 1001-1026.

[Ko2] H. Konno, Variation of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 14 (2003), no. 3, 289-311.

[Na1] Y. Namikawa, Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), 259-314

[Na2] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727-752.

[Na3] Y. Namikawa, Poisson deformations and birational geometry. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 339-359.

[Ox] J. Oxley, Matroid theory. Second edition. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 21. Oxford University Press, Oxford, 2011. xiv+684 pp.

[PW] N. Proudfoot and B. Webster, Intersection cohomology of hypertoric varieties. J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 1, 39-63.

[Slo] P. Slodowy, Four lectures on simple groups and singularities. Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, 1980. ii+64 pp.